CHAPITRE II : CAPACITÉS

Nous allons considérer dans les chapitres II, III et IV, diverses applications pouvant être définies soit sur l'ensemble des parties d'un espace E, soit sur celui des fonctions définies sur E. Nous noterons indifféremment $\phi(E)$ l'un de ces ensembles, laissant au lecteur le soin de distinguer sa signification dans certains cas.

Une capacité sur E est une fonction définie sur $\phi(E)$ et vérifiant les propriétés fondamentales d'une projection (cf le n.2 du chap I). Dans le premier paragraphe, on donne des définitions et des exemples. Au cours du second, on démontre un théorème de capacitabilité : si I est une capacité, et f une fonction analytique, alors $I(f) = \sup I(g)$, g s.c.s., $g \leq f$; et on donne des applications de ce théorème dans le troisième (on démontre en particulier le théorème de séparation des ensembles analytiques). Le quatrième est consacré à la construction de certaines capacités (dites fortement sous-additives) et le dernier contient des compléments.

1.- DÉFINITIONS. EXEMPLES.

1 DÉFINITION.- Une fonction I sur $\phi(E)$ est une précapacité sur E si on a

a) Si $f \leq g$, alors $I(f) \leq I(g)$

b) Si (f_n) est une suite croissante, alors $I(\sup f_n) = \sup I(f_n)$

La précapacité I est une capacité sur E si on a, de plus,

c) Si (g_n) est une suite décroissante de fonctions s.c.s., alors

$$I(\inf g_n) = \inf I(g_n)$$

REMARQUES.- 1) Si D est un espace localement compact à base dénombrable, on suppose de plus dans c) que les g_n sont à support compact. Une capacité I sur D se prolonge alors au compactifié $E = D \cup \{\infty\}$ en posant $I(f) = +\infty$ pour $f \in \Phi(E)$ telle que $f(\infty) \neq 0$.

2) Si la capacité I n'est définie que sur les parties et si $I(\emptyset) = 0$ et $I(E) < +\infty$, on la prolonge aux fonctions en posant $I(f) = \int I\{f > t\}\, dt$ (si $I(E) = +\infty$, on pose $I(f) = \alpha^{-1}[\int \alpha(I\{f > t\})\, dt]$, $\alpha(t) = \frac{4}{\pi}$ Arc tg t).

2 DÉFINITION.- Soit I une précapacité sur E. On dit que $f \in \Phi(E)$ est I-capacitable si l'on a $I(f) = \sup I(g)$, g s.c.s., $g \leq f$.

Une fonction qui est capacitable pour toute capacité est dite universellement capacitable : nous verrons bientôt que toute fonction analytique est universellement capacitable.

Nous donnerons au paragraphe suivant quelques exemples de précapacités qui ne sont pas des capacités, et nous donnons ici quelques exemples importants de capacités. Nous en verrons d'autres par la suite.

3 EXEMPLES.- 1) Le premier sera le plus simple, et, en un certain sens, l'exemple fondamental (cf l'appendice 1). Pour toute partie A de E, posons $I(A) = 0$ si $A = \emptyset$, et $I(A) = 1$ sinon : la fonction I ainsi définie est évidemment une capacité (remarquer que la propriété c) du n.1 exprime la compacité de l'espace E). Le prolongement de I aux fonctions donne : $I(f) = \sup f(x)$, $x \in E$. Plus généralement, si K est un compact de E, la fonction I_K définie par $I_K(f) = \sup f(x)$, $x \in K$, est une capacité. Bien que toutes les fonctions soient trivialement capacitables pour ces capacités, on a des théorèmes de capacitabilité non triviaux pour des capacités aussi simples (voir le chapitre V).

2) Soit d une distance compatible avec la topologie de E. La fonction qui à chaque partie de E associe son diamètre pour d est une capacité.

3) L'exemple suivant sera sans doute le plus familier pour beaucoup de lecteurs. Soit λ une mesure sur E. La mesure extérieure λ^* définie par $\lambda^*(A) = \inf \lambda(B)$, B borélien, $B \supset A$ est une capacité. (D'une manière générale, si I est une fonction définie seulement sur les boréliens de E, et vérifiant les conditions du n.1, on peut prolonger I en une capacité en posant, comme ci-dessus, $I(A) = \inf I(B)$, B borélien, $B \supset A$, pour toute partie A de E).

4) En combinant les exemples 1) et 3), on obtient un type de capacité rencontré fréquemment en théorie des processus stochastiques. Soient $E \times F$ un produit, et λ une mesure sur E. Posons, pour toute partie A de $E \times F$, $I(A) = \lambda^*[\pi(A)]$ où π est la projection sur E. La fonction I ainsi définie est une capacité sur $E \times F$. Plus généralement, soit α une application continue de G dans E, et soit J une capacité sur E. La fonction I définie par $I(A) = J[\pi(A)]$, A partie de G, est une capacité sur G.

5) Il convient évidemment de citer l'exemple historique de capacité : la capacité newtonienne. Soit K un compact de $\mathbb{R}^3$, et désignons par I(K) la borne supérieure des masses des mesures λ portées par K et de potentiel ≤ 1 partout (rappelons que le potentiel de la mesure λ est la fonction $U\lambda$ définie par $U\lambda(x) = \int \|x - x'\| \, d\lambda(x')$). On montre que la fonction I définie ainsi sur les compacts vérifie la condition c) du n.1, et l'inégalité suivante : $I(K \cup L) + I(K \cap L) \leq I(K) + I(L)$. On peut alors prolonger I en une capacité de la manière suivante (cf le paragraphe 4) : si U est ouvert, $I(U) = \sup I(K)$, $K \subset U$ et, si A est une partie quelconque, $I(A) = \inf I(U)$, U ouvert, $U \supset A$.

2.- LE THÉORÈME DE CAPACITABILITÉ

Quoique le théorème de capacitabilité ne soit pas vrai en général pour les precapacités, l'étape essentielle de sa démonstration est un théorème "d'approximation par en dessous" pour les précapacités prenant les valeurs 0 ou 1 :

4 THÉORÈME (de Sion).- *Soit* J *une précapacité à valeurs dans* $\{0,1\}$. *Si* f *est une fonction analytique telle que* $J(f) = 1$, *alors il existe une suite décroissante* (g_n) *de fonctions s.c.s. satisfaisant aux conditions suivantes*

a) *on a* $J(g_n) = 1$ *pour tout* n

b) *la fonction s.c.s.* $g = \inf g_n$ *est majorée par* f.

DÉMONSTRATION.- Nous allons d'abord montrer que l'on peut supposer que f est une fonction borélienne élémentaire. En effet, soit h une telle fonction, définie sur un produit $E\times F$, telle que f soit la projection πh de h sur E. Supposons démontré le théorème dans le cas des fonctions boréliennes élémentaires : comme la fonction $\varphi \to J[\pi(\varphi)]$ est aussi une précapacité sur $E\times F$, et à valeurs 0 ou 1, il existe une suite décroissante (φ_n) de fonctions s.c.s. sur $E\times F$ telle que $J[\pi(\varphi_n)] = 1$ pour tout n et que $\inf \varphi_n \leq h$. Il ne reste plus qu'à poser $g_n = \pi(\varphi_n)$, puisque $\pi(\inf \varphi_n) = \inf \pi(\varphi_n)$. Nous pouvons donc supposer que f est une fonction borélienne élémentaire : il existe alors une suite décroissante (f^m), et, pour chaque m, une suite croissante (f^m_n) de fonctions s.c.s. telles que $f = \inf f^m$ et $f^m = \sup f^m_n$. Comme $f \wedge f^1 = f$, on a $J(f \wedge f^1) = 1$: d'après le b) du n.1, il existe un entier n_1 tel que l'on ait aussi $J(f \wedge f^1_{n_1}) = 1$. Raisonnons par récurrence, et supposons demontrée l'existence d'une suite finie d'entiers $n_1, \dots, n_k$ telle que l'on ait

$$J(f \wedge f^1_{n_1} \wedge \dots \wedge f^k_{n_k}) = 1$$

et désignons par h^k la fonction entre parenthèses. Comme $h^k \wedge f^{k+1} = h^k$, on a $J(h^k \wedge f^{k+1}) = 1$: d'après le b) du n.1, il existe alors un entier n_{k+1} tel que $J(f \wedge f^1_{n_1} \wedge \dots \wedge f^k_{n_k} \wedge f^{k+1}_{n_{k+1}}) = 1$. Posons pour tout entier k

$$g_k = \inf (f^1_{n_1}, f^2_{n_2}, \dots, f^k_{n_k})$$

On définit ainsi une suite décroissante (g_k) de fonctions s.c.s. telle que $J(g_k) = 1$ pour tout k (cf le a) du n.1), et il est clair que $\inf g_k$ est majorée par f.

La définition d'une précapacité ne nous donnant aucune information sur le comportement de J pour les suites décroissantes, il peut arriver que l'on ait $J(g) = 0$ ou $J(g) = 1$. Voici un exemple de chacune de ces possibilités :

1) Soit $E = [0,1]$, et prenons pour précapacité J la fonction qui vaut 0 sur les ensembles de la 1ère catégorie de Baire (i.e. contenus dans une réunion dénombrable de compacts d'intérieur vide) et 1 sur les autres. L'ensemble A des irrationnels n'est pas de 1ère catégorie, mais tout compact contenu dans A est d'intérieur vide, et donc de première catégorie.

2) Prenons pour précapacité J la fonction qui vaut 0 sur les ensembles au plus dénombrables et 1 sur les autres : J n'est pas une capacité, et pourtant nous verrons au chapitre V que tout ensemble analytique est J-capacitable.

Voici maintenant le théorème de capacitabilité. Pour le lecteur familier avec la théorie des mesures extérieures de Carathéodory, je voudrais signaler, pour qu'il apprécie l'originalité de ce théorème, que la capacité newtonienne est une mesure extérieure, mais que les seuls boréliens mesurables au sens de Carathéodory sont triviaux (i.e. de capacité nulle, ou à complémentaire de capacité nulle).

5 THÉORÈME (de Choquet).- <u>Les fonctions analytiques sont universellement capacitables</u>.

DÉMONSTRATION.- Soient I une capacité et f une fonction analytique. Nous devons montrer que, pour tout $t < I(f)$, il existe une fonction s.c.s. $g \leq f$ telle que $I(g) \leq t$. Fixons t, et soit J_t la précapacité définie par : $J_t(h) = 1$ si $I(h) > t$, et $= 0$ sinon. D'après le théorème précédent, il existe une suite décroissante (g_n) de fonction s.c.s. telle que $J_t(g_n) = 1$ pour tout n et que $g = \inf g_n$ soit majorée par f. Etant donnée le c) du n.1, on a alors $I(g) = \inf I(g_n) \geq t$.

REMARQUE.- Il est facile de voir que la projection d'une fonction universellement capacitable est encore universellement capacitable. On ne connait cependant aucune autre propriété de stabilité de ces fonctions, le problème crucial étant celui-ci : si f (resp g), définie sur E (resp F) est universellement capacitable, le produit tensoriel (fxg) est-il universellement capacitable sur ExF ?
Nous verrons d'autre part au cours du paragraphe suivant qu'il existe des complémentaires d'ensembles analytiques qui ne sont pas universellement capacitables.

3.- APPLICATIONS

Applications à la théorie de la mesure

En appliquant le théorème de Choquet à l'exemple 3 du n.3, on obtient le théorème classique de Lusin

6 THÉORÈME.- Les ensembles analytiques sont universellement mesurables.

DÉMONSTRATION.- Soient A un ensemble analytique dans E, et λ une mesure sur E. Rappelons que A est dit λ-mesurable s'il existe deux boréliens B_1 et B_2 tels que $B_1 \subset A \subset B_2$ et que $\lambda(B_2 - B_1) = 0$. Il existe évidemment un borélien $B_2 \supset A$ tel que $\lambda^*(A) = \lambda(B_2)$, et, d'après le théorème 5, il existe un borélien $B_1 \subset A$, égal à la réunion d'une suite de compacts, tel que $\lambda^*(A) = \lambda(B_1)$: donc $\lambda(B_2 - B_1) = 0$.

7 COROLLAIRE.- Soit A une partie analytique de $[0,1] \times F$, et posons, pour tout $y \in F$, $D_A(y) = \inf \{t \in [0,1] : (x,t) \in A\}$. La fonction D_A ainsi définie sur F est universellement mesurable.

DÉMONSTRATION.- Pour tout t, l'ensemble $\{D_A < t\}$ est la projection sur F de l'ensemble analytique $A \cap ([0,t[\times F)$, et donc analytique (la fonction D_A n'est pas analytique, mais $1 - D_A$ l'est).

Les analogues abstraits de ce théorème et du théorème suivant jouent un rôle important en théorie des processus stochastiques.

8 THÉORÈME.- Soient A une partie analytique de $[0,1] \times F$, et λ une mesure sur F. Pour tout $\alpha > 0$, il existe un compact K de F et une fonction s.c.s. f définie sur K , à valeurs dans $[0,1]$, tels que

a) K est contenu dans la projection $\pi(A)$ de A sur F et l'on a

$$\lambda[\pi(A)] < \lambda(K) + \alpha$$

b) le graphe $\{(t,y) \in [0,1] \times K : f(y) = t\}$ de f est contenu dans A.

DÉMONSTRATION.- Appliquons le théorème de Choquet à l'exemple 4 du n.3 : la capacité $I(H)$ de la partie H de $[0,1]\mathrm{x}F$ est égale à $\lambda^*[\pi(H)]$. Pour $\alpha > 0$ fixé, il existe un compact L de $[0,1]\mathrm{x}F$, contenu dans A, tel que $I(A) < I(L)+\alpha$. Il suffit alors de poser $K = \pi(L)$ et $f = D_L$ (définie au n.7; nous laissons au lecteur le soin de vérifier que D_L est s.c.s. si L est compact).

9 COROLLAIRE.- Sous les mêmes hypothèses, il existe un ensemble $B \subset \pi(A)$, égal à la réunion d'une suite de compacts, et une fonction borélienne élémentaire f, définie sur B et à valeurs dans $[0,1]$, tels que l'on ait $B = \pi(A)$ λ-p.p. et que le graphe de f soit contenu dans A.

DÉMONSTRATION.- Posons $A = A_1$, et soient K_1 et f_1 un compact et une fonction s.c.s. satisfaisant aux conditions du théorème précédent pour $\alpha = 2^{-1}$. Posons alors $A_2 = A \cap ([0,1]\mathrm{x}K_1^c)$ et appliquons de nouveau le théorème précédent avec $\alpha = 2^{-2}$. Par récurrence, on construit ainsi une suite de compacts (K_n) disjoints de F contenus dans $\pi(A)$, et une suite de fonctions s.c.s. (f_n) définies sur K_n et dont les graphes sont contenus dans A. Il suffit alors de poser $B = \cup K_n$ et de prendre pour f la fonction sur B dont la restriction à K_n est égale à f_n.

REMARQUE.- Même si A est borélien dans $[0,1]\mathrm{x}F$, on ne peut en général avoir une "section" complète de A par un graphe de fonction borélienne. Cependant, on peut montrer que, pour A analytique, il existe une fonction f, mesurable si on munit F de la tribu engendrée par les ensembles analytiques, dont le graphe est une section complète de A (cf HOFFMANN-JØRGENSEN [ ]). Une telle fonction est universellement mesurable d'après le théorème 6.

Application à la théorie des ensembles analytiques

Nous allons voir maintenant que le théorème de Lusin sur la séparation des ensembles analytiques est une conséquence simple du théorème de Choquet

10 THÉORÈME.- *Soient* A_1 *et* A_2 *deux parties analytiques disjointes de* E. *Il existe alors deux boréliens disjoints* B_1 *et* B_2 *de* E *tels que* B_1 *contienne* A_1 *et* B_2 *contienne* A_2.

DÉMONSTRATION.- Deux parties A_1 et A_2 vérifiant la propriété de l'énoncé seront dites séparables par des boréliens, et séparées par les boréliens B_1 et B_2. Soient $F = E \times E$ et π_1 (resp π_2) la projection de F sur le premier (resp second) facteur E. Posons, pour toute partie H de F, $I(H) = 0$ si $\pi_1(H)$ et $\pi_2(H)$ sont séparables par des boréliens dans E, et $I(H) = 1$ sinon. La fonction I ainsi définie est une capacité sur F. La condition a) du n.1 est trivialement vérifiée. Vérifions b) : soit (H_n) une suite croissante telle que $I(H_n) = 0$ pour tout n, et, pour chaque n, soient B_n^1 et B_n^2 deux boréliens de E séparant $\pi_1(H_n)$ et $\pi_2(H_n)$. On vérifie aisément que les boréliens $B^i = \bigcup_m \bigcap_{n \geq m} B_n^i$, $i = 1,2$, séparent les projections $\pi_i(\bigcup H_n)$, $i = 1,2$, et donc $I(\bigcup H_n) = 0$. Vérifions enfin c). Soient (K_n) une suite décroissante de compacts telle que $I(K_n) = 1$ pour tout n : cela signifie simplement que les compacts $\pi_1(K_n)$ et $\pi_2(K_n)$ ne sont pas disjoints dans E, pour tout n. Il est alors clair que $\pi_1(\bigcap K_n)$ et $\pi_2(\bigcap K_n)$ ne sont pas disjoints, et donc que $I(\bigcap K_n) = 1$. Soient maintenant A_1 et A_2 deux parties analytiques disjointes de E, et soit $A = A_1 \times A_2$: A est analytique dans F, et donc on a $I(A) = \sup I(K)$, K compact, $K \subset A$. Comme on a évidemment $I(K) = 0$ pour tout compact $K \subset A$, on en déduit que A_1 et A_2 sont séparables.

REMARQUES.- 1) Il existe des complémentaires d'analytiques disjoints qui ne sont pas séparables par des boréliens (cf SIERPINSKI [ ]). Par conséquent, il existe des complémentaires d'analytiques qui ne sont pas universellement capacitables.

2) On peut utiliser le même schéma de démonstration (avec un produit dénombrable de copies de E) pour démontrer la généralisation suivante, due à Novikov et Liapunov : si (A_n) est une suite de parties analytiques de E telle que $\bigcap A_n$ soit vide, il existe une suite (B_n) de boréliens de E telle que B_n contienne A_n pour tout n et que $\bigcap B_n$ soit vide.

11 COROLLAIRE.- <u>Soit</u> (A_n) <u>une suite de parties analytiques de</u> E, <u>deux à deux disjointes</u>, <u>et de réunion égale à</u> E. <u>Les ensembles</u> A_n <u>sont alors boréliens dans</u> E.

DÉMONSTRATION.- Fixons l'entier k : l'ensemble A_k ainsi que son complémentaire $\bigcup_{n \neq k} A_n$ sont analytiques (et disjoints). Il résulte du théorème de séparation qu'ils sont alors boréliens.

12 COROLLAIRE.- <u>Soit</u> α <u>une application borélienne et surjective de</u> E <u>sur</u> F, <u>et soit</u> A <u>une partie analytique de</u> F. <u>Si</u> $\alpha^{-1}(A)$ <u>est borélienne dans</u> E, <u>alors</u> A <u>est borélienne dans</u> F.

DÉMONSTRATION.- en effet, le complémentaire de A est égal à l'image par α du borélien complémentaire de $\alpha^{-1}(A)$ dans E : le complémentaire de A est donc aussi analytique dans F.

4.- CONSTRUCTION DE CAPACITÉS

Il arrive souvent qu'une fonction d'ensembles (ou plus généralement une fonctionnelle) ne soit définie que pour une classe restreinte d'ensembles (ou de fonctions); le problème est alors de pouvoir étendre le domaine de définition de cette fonction sans en altérer les propriétés fondamentales.

Nous avons vu au premier paragraphe qu'une "capacité" définie seulement sur les boréliens s'étend facilement à tous les ensembles (cf l'exemple 3 du n.3), et même aux fonctions (cf la remarque 2 du n.1). Nous nous intéressons ici au problème de l'extension d'une fonction définie sur les compacts en une capacité.

La propriété cruciale à respecter dans une telle extension est la propriété b) du n.1. C'est en général la propriété la plus difficile à vérifier (cf chapitre VI), et aussi la plus facilement perdue dans les tentatives d'extension (cf la remarque 19-2) de ce paragraphe).

On ne connait de réponse vraiment satisfaisante que dans le cas important où la fonction, définie sur les compacts, est fortement sous-additive (cf la définition ci-dessous). En particulier, on ne connait pas de critère commode et suffisamment général pour qu'une fonction dénombrablement sous-additive soit une capacité (voir cependant les compléments du chapitre VI).

13 DÉFINITION.- <u>Soit</u> J <u>une fonction définie sur un sous-ensemble</u> $\underline{\underline{H}}$ <u>de parties de</u> E, <u>stable pour</u> ($\cup f, \cap f$). <u>On dit que</u> J <u>est</u>

a) croissante <u>sur</u> $\underline{\underline{H}}$ <u>si on a</u> $J(K) \leq J(L)$ <u>pour</u> $(K,L) \in \underline{\underline{H}} \times \underline{\underline{H}}$ <u>tel que</u> $K \subset L$

b) fortement sous-additive sur $\underline{\underline{H}}$ si on a, pour tout $(K,L)\in\underline{\underline{H}}\times\underline{\underline{H}}$,

$$J(K\cup L)+J(K\cap L)\leq J(K)+J(L)$$

c) continue à droite sur $\underline{\underline{H}}$ si, pour tout $K\in\underline{\underline{H}}$ et tout $\alpha>0$, il existe un ouvert U de E contenant K tel que l'on ait

$$J(L)\leq J(K)+\alpha$$

pour tout $L\in\underline{\underline{H}}$ inclus dans U.

Pour l'ensemble des parties compactes, la propriété c) est intimement liée à la propriété c) du n.1 :

14 THÉORÈME.- Soit J une fonction croissante sur l'ensemble $\underline{\underline{K}}$ des parties compactes de E. La fonction J est continue a droite sur $\underline{\underline{K}}$ si et seulement si elle satisfait la propriété (*) suivante : si (K_n) est une suite décroissante de compacts, $J(\bigcap_n K_n) = \inf J(K_n)$.

DÉMONSTRATION.- Supposons d'abord J continue à droite, et soit (K_n) une suite décroissante de compacts. Pour tout $\alpha>0$, il existe un ouvert U contenant $K = \bigcap K_n$ tel que $J(L)\leq J(K)+\alpha$ pour tout compact L contenu dans U; d'autre part, pour U fixé, les ensembles $L_n = K_n\cap U^c$ forment une suite décroissante de compacts d'intersection vide : donc K_n est inclus dans U pour n suffisamment grand. Il est alors clair que $J(K) = \inf J(K_n)$. Supposons maintenant que J vérifie (*), et soit K un compact. Il existe une suite décroissante d'ouverts (U_n) contenant K telle que K soit encore égal à l'intersection des $\overline{U}_n$. On a donc $J(K) = \inf J(\overline{U}_n)$. Il est alors clair que J est continue à droite.

Voici le théorème fondamental de ce paragraphe. Nous en amorcerons la démonstration, et l'achèverons apres avoir examiné de plus près la propriété de forte sous-additivité.

15 THÉORÈME.- *Soit* J *une fonction croissante, fortement sous-additive et continue à droite sur l'ensemble* $\underline{\underline{K}}$ *des parties compactes de* E. *Posons, pour tout ouvert* U *de* E,

$$I(U) = \sup J(K),\ K \in \underline{\underline{K}},\ K \subset U$$

et, pour toute partie A *de* E,

$$I(A) = \inf I(U),\ U \text{ ouvert},\ U \supset A$$

Alors I *est une extension de* J *à* $\phi(E)$, *et est une capacité fortement sous-additive et continue à droite sur* $\phi(E)$.

DÉMONSTRATION.- Il est clair d'abord que I est croissante et continue à droite sur $\phi(E)$. Ensuite, I est une extension de J : si K est un compact, il existe, pour tout $\alpha > 0$, un ouvert U_α contenant K tel que $J(L) \leq J(K)+\alpha$ pour tout compact L inclus dans U_α. Par conséquent, $I(U_\alpha) \leq J(K)+\alpha$ pour tout α; comme on a évidemment $I(K) \leq J(K)$, on en déduit que $I(K) = J(K)$. Nous allons montrer maintenant que I est fortement sous-additive. Nous utiliserons pour cela le lemme topologique suivant

Lemme : Soit K un compact contenu dans la réunion $U_1 \cup U_2$ de deux ouverts U_1 et U_2. Il existe alors deux compacts K_1 et K_2 tels que l'on ait $K = K_1 \cup K_2$ et $K_i \subset U_i$, $i = 1,2$.

démonstration .- Les ensembles $L_1 = K \cap U_2^c$ et $L_2 = K \cap U_1^c$ sont compacts et disjoints. Séparons les par deux ouverts disjoints V_1 et V_2. Les compacts $K_1 = K \cap V_2^c$ et $K_2 = K \cap V_1^c$ ont les propriétés requises.

Démontrons maintenant la forte sous-additivité de I sur l'ensemble des ouverts. Soient U_1 et U_2 deux ouverts, et soient K un compact inclus dans $U_1 \cup U_2$ et L un compact inclus dans $U_1 \cap U_2$. Décomposons K en deux compacts K_1 et K_2 comme dans le lemme. Comme J est croissante et fortement sous-additive sur $\underline{\underline{K}}$, on a

$$J(K)+J(L) \leq J[(K_1 \cup L) \cup (K_2 \cup L)]+J[(K_1 \cup L) \cap (K_2 \cup L)] \leq J(K_1 \cup L)+J(K_2 \cup L)$$

et le compact $K_i \cup L$ est inclus dans U_i pour $i = 1,2$. On en déduit immédiatement que $I(U_1 \cup U_2)+I(U_1 \cap U_2) \leq I(U_1)+I(U_2)$, i.e. que I est fortement sous-additive sur l'ensemble des ouverts. Soient maintenant A_1 et A_2 deux parties de E, et soit U_1 (resp U_2) un ouvert contenant A_1 (resp A_2) : alors l'ouvert $U_1 \cup U_2$ (resp $U_1 \cap U_2$) contient $A_1 \cup A_2$ (resp $A_1 \cap A_2$). La forte sous-additivité de I sur $\phi(E)$ en résulte aisément. Il ne nous reste plus qu'à vérifier que I satisfait la propriété b) du n.1, ce que nous ferons après l'étude de la forte sous-additivité.

16 THÉORÈME.- Soit J une fonction croissante sur un ensemble $\underline{\underline{H}}$ de parties de E, stable pour $(\cup f, \cap f)$. Les assertions suivantes sont équivalentes

a) la fonction J est fortement sous-additive :

$$J(K \cup L)+J(K \cap L) \leq J(K)+J(L)$$

quels que soient K, L éléments de $\underline{\underline{H}}$

b) la fonction J est alternée d'ordre 2 :

$$J(P \cup Q \cup R)+J(R) \leq J(P \cup R)+J(Q \cup R)$$

quels que soient P, Q, R éléments de $\underline{\underline{H}}$, inégalité qui s'écrit encore

$$J(P \cup Q \cup R)-J(P \cup R)-J(Q \cup R)+J(R) \leq 0$$

si $J(P \cup Q \cup R)$ est fini (c'est donc une inégalité de "concavité")

c) quels que soient les éléments A, B, K de $\underline{\underline{H}}$ tels que $A \supset B$, on a

$$J(A \cup K)+J(B) \leq J(B \cup K)+J(A)$$

inégalité qui s'écrit encore, si $J(A \cup K)$ est fini,

$$J(A \cup K)-J(A) \leq J(B \cup K)-J(B)$$

(autrement dit, pour un même accroissement de la variable, l'accroissement de J est plus grand si la variable est plus petite)

d) <u>quels que soient les éléments</u> A_i, B_i <u>de</u> $\underline{\underline{H}}$ <u>tels que</u> $A_i \supset B_i$ $(i = 1,2)$

$$J(A_1 \cup A_2) + J(B_1) + J(B_2) \leq J(B_1 \cup B_2) + J(A_1) + J(A_2)$$

<u>inégalité qui s'écrit encore,</u> <u>si</u> $J(A_1 \cup A_2)$ <u>est fini,</u>

$$J(A_1 \cup A_2) - J(B_1 \cup B_2) \leq [J(A_1) - J(B_1)] + [J(A_2) - J(B_2)]$$

DÉMONSTRATION.- Nous allons montrer que a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ d) $\Rightarrow$ a). Posons, dans a), $K = P \cup R$ et $L = Q \cup R$: on obtient b). Posons, dans b), $P = A$, $Q = B$ et $R = K$: on obtient c). Posons, dans d), $A_1 = K$, $B_1 = K \cap L$ et $A_2 = B_2 = L$: on obtient a) si $J(L)$ est fini, et a) est trivial si $J(L)$ est infini. Il nous reste à prouver que c) = d). Ecrivons deux fois c), une fois en posant $A = A_1$, $B = B_1$ et $K = A_2$, et l'autre fois en posant $A = A_2$, $B = B_2$ et $K = B_1$; ajoutons membre à membre les inégalités obtenues. On obtient d) si $J(A_2 \cup B_1)$ est fini. Si $J(A_2 \cup B_1)$ est infini, il résulte de c) appliqué à $A = B_1$, $B = \emptyset$ et $K = A_2$ que $J(A_2)$ ou $J(B_1)$ est infini : d) est alors triviale.

L'inégalité d) s'étend immédiatement par récurrence, et on obtient

17 COROLLAIRE.- <u>Sous les mêmes hypothèses,</u> <u>les assertions suivantes sont équivalentes</u>

a) <u>la fonction</u> J <u>est fortement sous-additive</u>

b) <u>quels que soient les éléments</u> A_i, B_i <u>de</u> $\underline{\underline{H}}$ <u>tels que</u> $A_i \supset B_i$ <u>pour</u> $i = 1,2,\ldots n$, <u>on a</u>

$$J(\cup A_i) + \Sigma J(B_i) \leq J(\cup B_i) + \Sigma J(A_i)$$

<u>inégalité qui s'écrit encore,</u> <u>si</u> $J(\cup A_i)$ <u>est fini,</u>

$$J(\cup A_i) - J(\cup B_i) \leq \Sigma [J(A_i) - J(B_i)]$$

REMARQUE.- Chacune des inégalités du n.16 est intéressante : a) pour la facilité de la vérification de sa validité, b) pour son intérêt théorique (cf appendice I), c) pour sa signification simple et d) pour son intérêt technique.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 15 (Suite et fin).- Il nous reste à vérifier la propriété suivante : si (B_n) est une suite croissante, alors $I(\bigcup B_n) = \sup I(B_n)$. Nous allons d'abord le faire lorsque les B_n sont ouverts, ce qui ne fera pas intervenir la forte sous-additivité. Soit donc (U_n) une suite croissante d'ouverts, et soit K un compact contenu dans $\bigcup U_n$: les U_n formant un recouvrement de K, U_n contient K pour n suffisamment grand. Il est alors clair que $I(\bigcup U_n) = \sup I(U_n)$. Soit maintenant (B_n) une suite croissante de parties quelconques. Si $I(B_n)$ est infini pour n suffisamment grand, on a évidemment $I(\bigcup B_n) = \sup I(B_n)$. Supposons donc $I(B_n)$ fini pour tout n, et , pour tout n et tout $\alpha > 0$, désignons par A_n^α un ouvert contenant B_n tel que $I(A_n^\alpha) \leq I(B_n)+2^{-n}\alpha$. On a alors, pour tout entier k,

$$I(\bigcup_1^k A_n^\alpha)-I(\bigcup_1^k B_n) \leq \sum_1^k [I(A_n^\alpha)-I(B_n)] \leq \alpha$$

Posons, pour tout entier k, $U_k^\alpha = \bigcup_1^k A_n^\alpha$: les U_k^α forment une suite croissante d'ouverts, et on a donc, d'après ce qui précède,

$$I(\bigcup U_k^\alpha) = \sup_k I(\bigcup_1^k A_n^\alpha) \leq \sup_k I(\bigcup_1^k B_n)+\alpha$$

Comme $\bigcup U_k^\alpha$ est un ouvert qui contient $\bigcup B_k$, il est alors clair que l'on a $I(\bigcup B_n) = \sup I(B_n)$.

En fait la fonction I vérifie une inégalité plus forte que celle de la forte sous-additivité : avec les mêmes hypothèses et notations que celles du théorème 15, on a

18 THEOREME.- <u>Soient</u> (A_n) <u>et</u> (B_n) <u>deux suites de parties de</u> E <u>telles que</u> A_n <u>contienne</u> B_n <u>pour tout</u> n. <u>Alors on a</u>

$$I(\bigcup A_n)+\sum I(B_n) \leq I(\bigcup B_n)+\sum I(A_n)$$

<u>inégalité qui s'écrit encore,</u> <u>si</u> $I(\cup A_n)$ <u>est fini,</u>

$$I(\bigcup A_n) - I(\bigcup B_n) \leq \sum [I(A_n)-I(B_n)]$$

DÉMONSTRATION.- Pour tout entier k, on a, d'après le théorème 17,

$$I(\bigcup_1^k A_n)+\sum_1^k I(B_n)\leq I(\bigcup_1^\infty B_n)+\sum_1^\infty I(A_n)$$

Il ne reste plus qu'à faire tendre n vers $+\infty$, en tenant compte du fait que l'on a $I(\bigcup A_n) = \sup_k I(\bigcup_1^k A_n)$.

19 REMARQUES.- 1) Le prolongement I de J du théorème 15 est "essentiellement" unique au sens suivant : si I' est une capacité dont la restriction aux compacts est égale à J, alors $I(A) = I'(A)$ pour toute partie analytique A de E. Cela résulte immédiatement du théorème de capacitabilité.

2) La forte sous-additivité joue un rôle crucial dans la démonstration du théorème 15. Nous verrons au cours de l'appendice I qu'il existe une capacité dénombrablement sous-additive I ayant la propriété suivante : si on pose, pour toute partie A de E, $I^*(A) = \inf I(U)$, U ouvert, $U\supset A$, la fonction I^*, égale à I sur les ouverts et compacts, et dénombrablement sous-additive, n'est pas une capacité (la propriété b) du n.1 n'étant plus satisfaite), et il existe un borélien A tel que $I^*(A) > 0$, mais tel que $I^*(K) = 0$ pour tout compact K inclus dans A.

Voici maintenant une série d'exemples de fonctions J croissantes, continues à droite et fortement sous-additive sur les compacts, auxquelles on peut donc appliquer le théorème d'extension.
Pour simplifier le langage, nous dirons que ces fonctions J sont des capacités fortement sous-additives

20 EXEMPLES.- 1) Si pour L compact de E on pose $J_L(K) = 1$ si $K\cap L \neq \emptyset$ et $J_L(K) = 0$ sinon, la fonction J_L ainsi définie est une capacité fortement sous-additive.

2) La restriction d'une mesure aux parties compactes est une capacité fortement sous-additive

3) Plus généralement, soient $E \times F$ un produit et λ une mesure sur E. Pour toute partie compacte K de $E \times F$, on pose $J(K) = \lambda[\pi(K)]$, où π est la projection sur E. La fonction J ainsi définie est une capacité fortement sous-additive.

4) La capacité newtonienne est fortement sous-additive (cf CHOQUET [ ])

5) Soient $E \times F$ un produit, G une partie compacte de $E \times F$, et λ une mesure sur F. Pour toute partie compacte K de E, posons $J(K) = \lambda[\pi(G \cap (K \times F))]$, où π est la projection sur F. La fonction J ainsi définie est une capacité fortement sous-additive.

Les quatre premiers exemples correspondent à quatre exemples de capacités du n.3, ces dernières étant les prolongements donnés par le théorème 15. Nous verrons à l'appendice I que ces cinq capacités sont "alternée d'ordre ∞", et que toute capacité alternée d'ordre ∞ est du type de la capacité J de l'exemple 5).

6) L'exemple suivant est une généralisation de la capacité newtonienne en théorie du potentiel. Soit E un espace localement compact à base dénombrable, et soit V une fonction s.c.i. et symétrique sur $E \times E$. On suppose de plus que V satisfait les deux "principes" suivant de la théorie du potentiel

i) pour tout ouvert relativement compact U de E, il existe une mesure λ portée par $\overline{U}$ telle que son potentiel $V\lambda$ soit ≤ 1 partout, et $= 1$ sur U (par définition $V\lambda(x) = \int V(x,x')\, d\lambda(x')$)

ii) si λ_1 et λ_2 sont deux mesures à support compact et à potentiel borné, le fait que $V\lambda_1$ majore $V\lambda_2$ sur le support de λ_2 entraine que $V\lambda_1$ majore $V\lambda_2$ partout

Désignons alors, pour tout compact K de E, par J(K) la borne supérieure des masses des mesures λ portées par K et dont le potentiel $V\lambda$ soit ≤ 1 partout. La fonction J ainsi définie est une capacité fortement sous-additive (cf BRELOT [ ], qui considère aussi des noyaux non symétriques).

7) Soit $\underline{\underline{L}}$ un ensemble de fonctions continues sur E stable pour $(\vee f, \wedge f)$, et soit ρ une <u>valuation</u> (resp subvaluation) sur $\underline{\underline{L}}$, i.e. une fonction sur $\underline{\underline{L}}$ vérifiant la condition suivante : quels que soient f_1 et f_2 éléments de $\underline{\underline{L}}$, on a

$$\rho(f_1 \vee f_2) + \rho(f_1 \wedge f_2) = \rho(f_1) + \rho(f_2) \quad (\text{resp } \leq)$$

Posons alors, pour tout compact K de E,

$$J(K) = \inf \rho(f), \; f \in \underline{\underline{L}}, \; \{f > 1\} \supset K$$

La fonction J ainsi définie est une capacité fortement sous-additive.

8) Voici un exemple de la situation précédente. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et designons par λ la restriction de la mesure de Lebesgue a l'ouvert U. Nous prendrons pour $\underline{\underline{L}}$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes (≥ 0) à <u>support compact</u> contenu dans U (rappelons que toute $f \in \underline{\underline{L}}$ a des derivées partielles $D_1 f, \ldots, D_n f$ définies presque partout). Soit d'autre part W une fonction borélienne ≥ 0 définie sur $U \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$: pour $f \in \underline{\underline{L}}$, nous désignerons par $W(.,f,Df)$ la fonction λ-mesurable sur U $x \to W[x, f(x), D_1 f(x), \ldots, D_n f(x)]$. Posons alors, pour toute $f \in \underline{\underline{L}}$, $\rho(f) = \int W(x,f,Df)\, d\lambda(x)$. La fonction ρ ainsi définie est une valuation sur $\underline{\underline{L}}$ (cf CHOQUET [ ]), et on lui associe, comme ci-dessus, une capacité J fortement sous-additive. En particulier, si $U = \mathbb{R}^3$ et $W(.,f,Df) = (\text{gradient } f)^2$, la valuation ρ est l'intégrale de Dirichlet, et la capacité J est égale à la capacité newtonienne (à une constante multiplicative près).

5.- COMPLÉMENTS

A : CAPACITÉS. CAS ABSTRAIT.

Dans cette section, E désigne un ensemble sans structure topologique, et $\underline{\underline{E}}$ désigne un pavage sur E. Nous renvoyons le lecteur à MEYER [ ] pour les démonstrations.

21 DÉFINITION.- Une $\underline{\underline{E}}$-capacité sur E est une fonction I définie sur $\phi(E)$ et satisfaisant les conditions suivantes

a) si $f \leq g$, alors $I(f) \leq I(g)$

b) si (f_n) est une suite croissante, alors $I(\sup f_n) = \sup I(f_n)$

c) si (g_n) est une suite décroissante d'elements de $\underline{\underline{E}}$, alors $I(\inf g_n) = \inf I(g_n)$

Si I est une $\underline{\underline{E}}$-capacité, on dit que $f \in \phi(E)$ est I-capacitable si

$$I(f) = \sup I(g),\ g \in \underline{\underline{E}}_\delta\ ,\ g \leq f$$

On a alors une version abstraite du théorème de Sion, et du théorème de Choquet :

22 THÉORÈME.- Un ensemble $\underline{\underline{E}}$-analytique est capacitable pour toute $\underline{\underline{E}}$-capacité.

On peut alors reprendre, à peu près dans les mêmes termes, les applications à la théorie de la mesure. On a aussi le théorème de séparation, mais avec une restriction sur le pavage :

23 THÉORÈME.- Soit $(E,\underline{\underline{E}})$ un espace pavé compact. Si A_1 et A_2 sont deux parties $\underline{\underline{E}}$-analytiques disjointes de E, il existe deux éléments disjoints B_1 et B_2 du saturé de $\underline{\underline{E}}$ pour $(\cup d, \cap d)$ tels que $B_i \supset A_i$ pour $i = 1,2$.

En particulier, si A_2 est le complémentaire de A_1, alors A_1 et A_2 appartiennent au saturé de $\underline{\underline{E}}$ pour $(\bigcup d, \bigcap d)$(qui n'est pas stable en général pour le passage au complémentaire)

Passons maintenant à la construction de capacités. La situation est ici moins satisfaisante que dans le cas topologique, mais on a quand même "l'essentiel" du théorème 15

24 THÉORÈME.- Soit J une fonction croissante, fortement sous-additive sur le pavage $\underline{\underline{E}}$, et satisfaisant la condition suivante : pour toute suite croissante (A_n) d'éléments de $\underline{\underline{E}}$ telle que $\bigcup A_n$ appartienne encore à $\underline{\underline{E}}$, on a $J(\bigcup A_n) = \sup J(A_n)$. Posons alors, pour tout $B \in \underline{\underline{E}}_\sigma$, $I(B) = \sup J(A)$, $A \in \underline{\underline{E}}$, $A \subset B$, et, pour toute partie C de E, $I(C) = \inf I(B)$, $B \in \underline{\underline{E}}_\sigma$, $B \supset C$. La fonction I ainsi définie est une extension de J, croissante, et possède les deux propriétés suivantes

i) si (A_n) est une suite croissante, alors $I(\bigcup A_n) = \sup I(A_n)$

ii) si (A_n) et (B_n) sont deux suites telles que $A_n \supset B_n$ pour tout n,

$$I(\bigcup A_n) + \sum I(B_n) \leqslant I(\bigcup B_n) + \sum I(A_n)$$

Pour que la fonction I soit une $\underline{\underline{E}}$-capacité, il faut et il suffit que $I(\bigcap A_n) = \inf I(A_n)$ pour toute suite décroissante (A_n) d'éléments du pavage $\underline{\underline{E}}$.

B : CAPACITÉS. CAS TOPOLOGIQUE

25 DÉFINITION.- Soit E un espace topologique séparé. Une capacité sur E est une fonction I définie sur les parties de E et satisfaisant les conditions suivantes

a) si $A \subset B$, alors $I(A) \leqslant I(B)$

b) si (A_n) est une suite croissante, alors $I(\bigcup A_n) = \sup I(A_n)$

c) si (K_n) est une suite décroissante de compacts, alors
$I(\bigcap K_n) = \inf I(K_n)$

On dit que la capacité I est continue à droite si elle possède de plus la propriété suivante (plus forte que c))

c') pour tout compact K et tout $\alpha > 0$, il existe un ouvert U de E contenant K tel que l'on ait $I(U) \leq I(K) + \alpha$.

Une partie A de E est alors I-capacitable si $I(A) = \sup I(K)$, K compact inclus dans A.

Avant d'énoncer les théorèmes de capacitabilité, rappelons que les espaces sousliniens au sens de Bourbaki sont analytiques au sens de Choquet. Pour les démonstrations, nous renverrons à SION [ ] et BOURBAKI [ ].

26 THÉORÈME (de Choquet).- Un ensemble analytique contenu dans une réunion dénombrable de compacts est capacitable pour toute capacité.

27 THÉORÈME (de Sion).- Un ensemble analytique est capacitable pour toute capacité continue à droite.

La capacité utilisée dans la démonstration du théorème de séparation étant continue à droite, on a

28 COROLLAIRE.- Si A_1 et A_2 sont deux parties analytiques disjointes, il existe deux boréliens disjoints B_1 et B_2 tels que $B_i \supset A_i$ pour $i = 1,2$

Enfin, le théorème 15 relatif à la construction de capacités est ici valable sans aucune modification.